SOBRE CONSEQUÊNCIA LÓGICA

ON LOGICAL CONSEQUENCE

Hércules de Araújo Feitosa[1]
Marcelo Reicher Soares[2]
Ângela Pereira Rodrigues Moreira[3]

1 Prof. Dr. da Faculdade de Ciências - UNESP, Campus de Bauru. Email: haf@fc.unesp.br.

2 Prof. Dr. da Faculdade de Ciências - UNESP, Campus de Bauru. Email: reicher@fc.unesp.br.

3 Profª. Drª. Contratada pela Faculdade de Ciências - UNESP, Campus de Bauru. Email: angela.p.rodrigues@bol.com.br.

Recebido em: 13/01/2016
Aceito em: 06/06/2016

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica*. Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

RESUMO

Neste artigo analisamos o conceito de consequência lógica. Partimos de alguns olhares bastante tradicionais e caminhamos para uma noção de formalização da consequência dedutiva. Discutimos aspectos lógicos conceptuais deste desenvolvimento e apresentamos contribuições nossas da formalização da consequência *à la* Tarski.

Palavras-chave: Consequência lógica. Inferência. Operador de consequência. Relações de consequência. Lógica universal.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

ABSTRACT

In the paper, we analyse the concept of logical consequence. We start from some traditional view and go in direction to a notion of formalization of deductive consequence. We discuss conceptual and logical aspects of this development and present some contributions relative to the formalization of consequence *à la* Tarski.

Keywords: Logical consequence. Inference. Consequence operator. Consequence relation. Universal logic.

INTRODUÇÃO

Pretendemos discutir o conceito de consequência num sentido muito amplo, bem maior que o usualmente tratado nos compêndios sobre lógica. Certamente caminharemos na direção desta abordagem mais usual, mas destacamos que também é uma atribuição lógico-filosófica pensar na consequência em suas mais variadas concepções.

O ponto inicial para entendermos o conceito de consequência é considerar que podemos obter uma ou mais informações a partir de uma coleção de informações dadas. Chamaremos, como é feito usualmente em lógica, as informações iniciais de *premissas*, e as obtidas de *conclusões*. Aqui nos deteremos em avaliar as situações em que as conclusões são únicas.

Vamos denotar uma consequência do seguinte modo: $\Delta \curvearrowright \varphi$, em que Δ representa a coleção de premissas, φ é a conclusão e $\curvearrowright$ indica a passagem das premissas para a conclusão. Precisamos refletir sobre quem são os membros de $\Delta\cup\{\varphi\}$ e o que está por trás do símbolo $\curvearrowright$.

Os elementos que compõem o conjunto $\Delta\cup\{\varphi\}$ receberam, ao longo da história, nomes e caracterizações levemente distintas. Como exemplos citamos as expressões "enunciados", "juízos", "leis", "julgamentos", "proposições", "sentenças", entre outras. Há muitas discussões em torno desses termos, mas não trataremos disto aqui.

Contudo, uma visão geral é que eles são portadores de verdade, isto é, há sentido em dizer que cada um destes termos, num dado contexto, é verdadeiro ou falso.

Para unificar o discurso, vamos chamá-los de proposições. Assim, a ideia de consequência está na relação que o símbolo $\curvearrowright$ estabelece, convencionalmente, entre as premissas e a conclusão, todas proposições.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

Mas a expressão consequência também evoca as expressões “argumento”, “raciocínio” e “inferência”. Serão elas sinônimas ou terão significados distintos? Buscamos a conceituação destes termos e defendemos alguma distinção entre eles.

Para a abordagem usual da lógica, que trata da consequência lógica, a caracterização desta relação $\curvearrowright$ de consequência fica muito clara e precisa, como veremos na Seção 4. Mas para a versão ampla, precisaremos de alguns cuidados que procuramos evidenciar.

Argumentos, raciocínios e inferências

Desde a Antiguidade, observamos o interesse na investigação sobre a validade de argumentos. Aristóteles (384-322 a. C.) iniciou estudo sistemático das formas de argumentação ou de raciocínios no seu *Organon*.

Nas nossas apresentações do tópico, surgirão estas expressões que julgamos conhecidas e elas serão tomadas com suas caracterizações informais. Na frase acima, podemos entender que argumento e raciocínio são sinônimos. Contudo, conforme afirmamos na introdução, buscamos fazer alguma distinção.

Argumento pode ser visto ainda como uma disputa ou confronto, mas não será essa a abordagem que priorizaremos.

O nosso conceito de argumento pressupõe um encadeamento ordenado e justificado de proposições que oferece razões aceitáveis para que ele suporte ou garanta a conclusão. Assim não basta termos uma coleção de proposições $\Delta \cup \{\varphi\}$. Se não tivermos justificativas para cada proposição que ocorre no encadeamento, bem como para a ordem imposta entre estas proposições, julgamos que não temos um argumento.

Assim, argumento é uma relação de consequência $\Delta \curvearrowright \varphi$ justificada.

Para obtermos a conclusão a partir das premissas podemos utilizar um único argumento ou vários. É razoável, porém, como faremos, que tais argumentos sejam em número finito.

Ao buscarmos definições informais para o termo raciocínio, encontramos algo como: (1) uso da razão, principalmente para a obtenção de conclusões, inferências ou julgamentos; (2) o ato ou processo de construir conclusões a partir de fatos; (3) o ato ou processo pelo qual uma pessoa raciocina; (4) o processo de formar conclusões,

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

julgamentos ou inferências a partir de fatos ou premissas. Usamos algumas das expressões que temos destacado para definir a outra.

Notemos que nas caracterizações de raciocínio apresentadas acima usamos, com frequência, o artigo definido “o”, vamos tomá-lo como um ato uno. Cada explicação de um argumento é um raciocínio, isto é, estamos convencionando que os raciocínios são como unidades de composição de um argumento. Assim, um conjunto de raciocínios justifica um argumento e um conjunto de argumentos justifica uma conclusão. Um argumento pode apresentar diferentes tipos de raciocínios em sua justificação. Num argumento dedutivo, como veremos, cada vez que aplicamos uma regra de dedução, executamos um raciocínio que compõe a justificação desse argumento. Já em um argumento não dedutivo, é permitida em sua justificação a utilização de raciocínios que podem não ter uma explicação completamente clara e precisa, como aquela oferecida por uma regra de dedução. Pode ser um raciocínio por emoção, por comparação, por hábito, por semelhança ou outro procedimento não dado numa regra.

Por inferência vamos designar o processo acabado $\Delta \curvearrowright \varphi$ de chegarmos numa conclusão a partir de premissas no qual um ou mais dentre os argumentos utilizados para justificar o processo podem, eventualmente, não estar completamente justificados.

Assim, toda consequência é uma inferência, porém nem toda inferência é uma consequência.

Certamente pode haver discordância sobre esta conceituação, mas entendemos que ela nos ajuda a ampliar a concepção do conceito de consequência, por meio do conceito de inferência. Dessa forma somos conduzidos para além da consequência lógica que utiliza somente argumentos justificados por raciocínios dedutivos.

Conceitos de inferência: dedutiva, indutiva e abdutiva

Como é bastante conhecido na literatura sobre consequência, temos pelo menos três tipos de inferência destacadas.

Desde a Antiguidade, a Lógica investiga sobre as relações de consequência, mas preferencialmente sobre a inferência dedutiva. Por muito tempo entendemos que a Lógica nos fornecia as “leis fundamentais do pensamento”.

Diante desta perspectiva, a Lógica estabeleceu ambiente propício para a análise e desenvolvimento da inferência dedutiva.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

Este tipo de consequência tinha, já na Antiguidade, a motivação da Matemática, que apresentava um exemplo de sistema axiomático dedutivo de enorme beleza e rigor, a Geometria de Euclides de Alexandria, em sua obra Os Elementos (EUCLIDES, 2009).

O método dedutivo assegura que quando as premissas, hipóteses, condições iniciais de um problema são conhecidas, a correta aplicação do procedimento dedutivo, a dedução, conduz à conclusão de modo seguro. Em suma, o método dedutivo, corretamente aplicado, sempre leva premissas verdadeiras (ou aceitas) em conclusão verdadeira (aceita segundo as mesmas condições das premissas).

A justificação efetuada passo a passo das premissas até a conclusão no método dedutivo é chamado de demonstração.

Este método tem caráter determinístico e pode ser bem implementado por máquinas. Analistas dizem que com o seu desenvolvimento, um sistema dedutivo apenas desvenda as informações que já constam das premissas e, por isso, ele não acrescentaria novidade no corpo de conhecimento. Mesmo se concordarmos com essa opinião, restaria, ainda, a nova perspectiva dada à conclusão depois do processo de dedução. Tal nova perspectiva, de alguma forma, realça novos aspectos, que ainda não teriam sido totalmente explicitados pelas premissas antes do processo.

Um exemplo de argumento dedutivo é o seguinte: se "todos os mamíferos são mortais" e "todos os cães são mamíferos", então "todos os cães são mortais". Se as premissas são verdadeiras, e neste caso o são, então a conclusão tem que ser verdadeira.

A partir do renascimento, pensadores ilustres, principalmente britânicos como David Hume e John Locke, reconhecem que a lógica praticada até aquele momento, apenas com os métodos dedutivos, não contemplaria todos os possíveis procedimentos inferenciais (SALMON, 1984).

Resultados de disciplinas empíricas poderiam admitir outros tipos de justificações. Apresentaram então outro tipo de inferência, a inferência indutiva ou indução. Esta é a indução de Hume, que ressaltamos ser distinta da indução por enumeração, encontrada em escritos de Aristóteles.

A indução propõe e admite concluir, a partir de alguns casos, muitos casos, porém não todos. Este tipo de raciocínio almeja concluir sobre o todo operando sobre a parte. Um exemplo de inferência indutiva seria o seguinte: como "o sol tem aparecido todas as manhãs" então "ele aparecerá amanhã". A premissa nos dá fortes razões para crermos na conclusão, contudo não é necessário que ocorra esta conclusão. Temos apenas uma forte inclinação para aceitarmos a conclusão. Outro exemplo: se "a vacina de gripe tem protegido bem a população idosa', então "o senhor Antônio, que é idoso e tomou a vacina, está protegido". Apenas podemos esperar que a vacina de fato faça a proteção, mas nunca temos total segurança.

Temos ambientes científicos adequados para a sua reflexão e manipulação. A estatística é área da ciência que, dentre outras coisas, se ocupa do estudo da indução. Em geral as ciências da natureza são fundamentalmente calcadas nos métodos indutivos. Seus resultados são sempre prováveis, esperados, mas nunca garantidos absolutamente.

Por isso, acreditam alguns pensadores da indução que este tipo de inferência teria sim algum compromisso com a novidade, com fatos não esperados. Por outro lado, a concepção de argumento justificado fica prejudicada, uma vez que nem sempre podemos dar boas razões para suportar certas conclusões indutivas. A justificação indutiva ainda é uma questão a ser refletida e talvez, se possível, enfrentada. Alguns defendem que não tem sentido exigir a justificação como na dedução para a indução.

Pierce considerou que nem mesmo a junção das inferências dedutivas e indutivas daria conta do enorme espectro inferencial (GONZALEZ, HASELAGER, 2002). O pensador estadunidense destacou que existem situações em que uma explicação original, não esperada, inovadora, que por vezes ocorre com o conhecimento, não poderiam ser concretizadas por uma dedução nem tão pouco por uma indução. Nestes casos, a mente, ou razão, exerce uma operação inusitada e cria uma explicação nova e satisfatória, sem efetuar um raciocínio baseado nos dois métodos de inferência mencionados.

A este tipo de inferência, Pierce chamou abdução ou inferência abdutiva.

A abdução parece estar vinculada ao novo, ao inédito, à criatividade (para além da criação).

Este procedimento inferencial ainda recebe muitas, necessárias e relevantes avaliações. Precisa ser melhor compreendido. Há mesmo uma disputa se a abdução seria, de fato, um novo método de inferência ou se a indução daria conta daquilo apregoado à abdução.

Devido a estas considerações, ao se apresentar um argumento discursivo e indutivo, usual nas ciências humanas, é bom não usarmos a expressão demonstração. É melhor dizer que o autor expôs, argumentou ou defendeu uma tese, mas não que ele demonstrou.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

Apesar de parecer dar maior força ao argumento, a expressão não é adequada. Uma demonstração correta não pode ser revogada dentro do sistema formal em que foi realizada, os demais argumentos sim.

A seguir, concentramo-nos no conceito de consequência dedutiva. Caminharemos de uma visão mais geral e intuitiva para uma mais específica e formalizada.

Consequência formal

A noção de consequência, como vimos em nossa abordagem inicial, se apoia na argumentação, em linguajar menos formal usa expressões como: "então", "portanto", "deste modo", "por isso", "assim sendo" para associar as premissas com a conclusão. Elas são abundantes nos textos acadêmicos e científicos.

Num contexto mais próximo da lógica, a relação Γ ↷ φ aparece como sinônimo de expressões como: "Γ deduz φ", "φ é derivada de Γ", "Γ infere φ", "Γ implica φ", "Γ garante φ", "Γ produz φ", "φ segue de Γ", "obtém-se φ de Γ".

É mister indicar como se dá, formalmente, esta passagem de Γ para φ. Intuitivamente, tem algo a ver com a preservação de verdade ou de alguma outra propriedade do conjunto Γ para a proposição φ.

Também usamos com grande frequência o operador de implicação ®, que age como um conectivo de condicional para proposições do tipo "se ___, então ___", "se φ, então ψ", em que φ é o antecedente e ψ é o consequente.

Certamente fazemos uma distinção entre os conceitos envolvidos em φ ® ψ e {φ} ↷ ψ. Dadas duas proposições quaisquer φ e ψ, sempre podemos escrever a proposição φ ® ψ. Assim, o operador ou conectivo ® apenas operou e gerou a proposição φ ® ψ. Contudo ↷ exige argumentos e métodos que de alguma forma justifiquem o relacionamento estabelecido entre a premissa {φ} (no caso, unária) e a conclusão ψ, {φ}↷ψ.

Na lógica clássica e muitas outras lógicas que respeitam um importante resultado metateórico, conhecido como Teorema da Dedução, estes dois conceitos podem ser relacionados, segundo uma caracterização bem específica: ?

Δ ⊢ φ ® ψ se, e somente se, Δ∪{φ} ⊢ ψ,

Situação em que ⍰ é identificado com ⍰. Na próxima seção, estes conceitos ficam mais claros. Contudo, isto em geral não vale e precisamos realçar essa situação.

Voltemos à reflexão sobre a passagem de Γ para φ.

Um critério recorrente para esta relação se funda no aspecto da formalidade em contraposição ao aspecto material da consequência.

No argumento "Ana é magra e casada. Portanto, Ana é casada", a conclusão não depende de quem é Ana e o que significa ser magro ou casado. Se as premissas "Ana é magra" e "Ana é casada" (ou premissa "Ana é magra e casada") são corretas, então a conclusão também é correta. Dizemos que o argumento vale devido apenas a sua forma.

Agora no argumento, como "Ana é casada com o filho de Maria", então "Ana é nora de João", só pode ser validado se apelamos a um fato material que alguém pode saber, mas não consta do argumento, que "Maria e João são casados". Este é um exemplo de consequência material em contraposição à formal. Para a conclusão se faz necessário mais informações do que consta nas premissas e precisamos ainda entender também o seu conteúdo. Agora precisamos adicionalmente entender o significado de "nora".

Isto nos remete a uma antiga reflexão sobre os termos "forma" e "conteúdo". Decorre daí a denominação de lógica formal. Para as leis da lógica, precisam ser respeitados os aspectos formais.

Mas isto não é tudo.

Tarski defendeu que a relação de consequência lógica deve respeitar os seguintes aspectos: (α) necessidade: as premissas têm que ser necessárias para a conclusão, assim sendo, não há situação (mundo possível) em que as premissas sejam verdadeiras (válidas) e a conclusão não; (β) consequência formal: apenas o caráter formal envolve a relação de consequência. O significado ou conteúdo dos termos envolvidos não devem ajudar ou atrapalhar a validade da relação de consequência; (γ) A validade de uma consequência deve ter apenas influência de conhecimento *a priori*. O argumento não pode ser influenciado por qualquer aspecto de conhecimento empírico.

Consequência sintática (demonstrações) e semântica (modelos)

Para tratarmos com mais cuidado, como nos manuais de lógica, das chamadas consequências sintáticas e semânticas, abordaremos o conceito de sistema formal **S**. Muitas das demonstrações em disciplinas próximas à Matemática, como a Física e a Química, não se baseiam integralmente em sistemas formais, mas num sistema semiformal, que apenas evocam aspectos da formalização apresentada pela Matemática.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

O primeiro item a compor um sistema formal contemporâneo é sua *linguagem*. Ela fica determinada ao se explicitar o seu conjunto de símbolos, algumas vezes chamado de *alfabeto*, o qual denotamos aqui por **A**.

Na busca por clareza e objetividade, trocamos a linguagem natural por linguagens *artificiais* ou *formais*.

O conjunto das *expressões* geradas a partir do alfabeto **A** é o conjunto de todas as sequências finitas de símbolos de **A** ou justaposições finitas de símbolos de **A**.

Para a distinção das *expressões bem formadas* deste sistema formal, temos regras gramaticais precisas.

Dentre estas expressões bem formadas, destacamos o conjunto das fórmulas, o qual denotamos por **F**. Dependendo do sistema formal considerado, podemos ter outras classes de expressões bem formadas. Indicamos as fórmulas por letras gregas minúsculas: φ, ψ, σ.

Outro item que ocorre nos sistemas formais axiomáticos é um conjunto de axiomas ou postulados, o qual denotamos por **P**. O conjunto dos axiomas é subconjunto do conjunto das fórmulas. Assim, o que representa as leis do sistema axiomático são as fórmulas, estas últimas serão os portadores de verdade, aqueles elementos que serão tomados como verdadeiros ou falsos.

Podemos desenvolver sistemas formais que não sejam axiomáticos. Nestes casos, o conjunto **P** é vazio e ainda assim termos uma relação de consequência muito precisa. São exemplos de tais sistemas formais os tablôs, os sistemas de dedução natural e alguns cálculos de sequentes.

O último componente de um sistema formal é o conjunto **R** das regras de dedução. Não há sistema formal sem regras. São estas regras que possibilitam a dedução ou demonstração no sistema formal, isto é, a passagem de uma situação para outra situação que explicita a noção de dedução.

Num sistema axiomático, chamamos de *teorema* cada fórmula φ que:

(i) é um dos axiomas de **S**; ou

(ii) é conclusão de uma regra de dedução de **R** em que as hipóteses são teoremas de **S**.

Assim, um *sistema formal* **S** é uma quádrupla **S** = (**A**, **F**, **P**, **R**), em que:

(i) **A** é um conjunto, frequentemente enumerável, de símbolos, o alfabeto de **S**.

Uma sequência finita de símbolos de **A** é uma expressão de **S**.

(ii) **F** é o conjunto das expressões bem formadas de **S**.

(iii) **P** é um subconjunto de **F**, o conjunto dos axiomas ou postulados de **S**.

(iv) **R** é um conjunto finito de regras entre fórmulas, as *regras de dedução*, tais que se $R(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \psi) \subseteq \mathbf{R}$, então a fórmula ψ, *conclusão* da regra, é deduzida pela regra R de φ_i, $1 \leq i \leq n$.

Num sistema formal ou sistema axiomático, os conceitos de dedução e demonstração são muito precisos e inequívocos. Eles caracterizam precisamente o que chamamos de consequência sintática ou consequência dedutiva.

Uma *demonstração* em **S** é uma sequência $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ de fórmulas tais que, para cada i, $1 \leq i \leq n$, φ_i é um axioma ou φ_i é deduzida de fórmulas precedentes por alguma regra R de **R**. Um *teorema* de **S** é como chamamos a última fórmula φ_n de uma demonstração. A fórmula φ_n é o teorema e o procedimento é uma *demonstração* de φ_n em **S**.

Segue destas definições que uma demonstração é um procedimento e é finito, pois acaba no passo n.

O conceito de dedução é uma leve ampliação do conceito de demonstração, de modo que toda demonstração é um caso de dedução.

Uma fórmula ψ é *deduzida* ou *derivada* em **S** de um conjunto Γ de fórmulas, o que é denotado por $\Gamma \vdash \psi$, se existe uma sequência $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ de fórmulas de maneira que para cada $1 \leq i \leq n$, φ_i é um axioma, ou $\varphi_i \subseteq \Gamma$, ou φ_i é deduzido de fórmulas que ocorrem anteriormente na sequência, e φ_n é ψ. Esta sequência é uma *dedução* de ψ a partir de Γ. Os membros de Γ são as *premissas* ou *hipóteses* e ψ é a *conclusão* da dedução.

Uma fórmula ψ deduzida do conjunto vazio, isto é, $\varnothing \vdash \psi$, é um teorema de **S** e é usualmente denotado apenas por $\vdash \psi$.

Observamos que esta caracterização da dedução formal explica completamente a inferência dedutiva. Mais do que uma inferência, este é um argumento dedutivo, pois cada passo da dedução precisa estar muito bem justificado. Ele preserva os aspectos de necessidade, formalismo e a prioridade.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

No cotidiano da matemática usual, não somos tão explícitos nas deduções e demonstrações. O texto fica menos pedante, mais breve, embora menos preciso, perfeitamente compreensível pelos praticantes. Se fizermos questão da precisão, teremos que pagar o preço da prolixidade.

Por outro lado, ainda no ambiente dos sistemas formais, temos o conceito de consequência semântica.

Assim é que atribuímos um valor (valoramos, interpretamos) para os elementos sintáticos de **S**, no nosso caso, as fórmulas de **S,** sendo esse valor um elemento de uma estrutura matemática a parte dos elementos de **S**. Esta estrutura pode até ser gerada por elementos de **S**, mas isto não é essencial.

A atribuição de valores mencionada acima, também chamada de valoração ou interpretação, é dada por uma função, um conceito bastante preciso, que atribui a cada fórmula, exatamente um significado na estrutura matemática considerada como semântica ou modelo para a lógica.

Uma lógica, como vimos, pode ter teoremas e não teoremas. Assim a estrutura semântica deve conter elementos para interpretar estes e os demais itens. Chamamos mais especificamente de modelo uma parte da estrutura semântica que interpreta a parte relevante de **S**, fundamentalmente os teoremas e leis validadas.

Para simplificar, temos uma função ξ: **S** ® $\mathcal{M}$, em que ξ é a função de interpretação, **S** fica determinado por suas fórmulas e $\mathcal{M}$ é a sua estrutura semântica.

A consequência semântica é denotada por: $\Gamma \vDash \varphi$, para $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq For(\mathbf{S})$.

Também entendemos que φ foi obtida de Γ, mas como se dá esta relação de consequência?

A ideia agora é que se a interpretação ξ leva cada elemento de Γ em elementos que representam a verdade, ou melhor, a validade em $\mathcal{M}$, então esta interpretação também leva o elemento φ num elemento válido de $\mathcal{M}$.

De modo breve, a consequência semântica é válida, é aceitável, quando a interpretação leva elementos válidos em elementos válidos. Da tradição da lógica, é tal que leva verdades em verdades.

Seja $\xi(\Gamma) = \{\xi(\gamma) : \gamma \subseteq \Gamma\}$ o conjunto dos valores dos elementos de Γ em $\mathcal{M}$ e $D \subseteq \mathcal{M}$, o conjunto que representa os elementos válidos de $\mathcal{M}$. Podemos indicar a consequência semântica por:

$\Gamma \vDash \varphi$ se, e somente se, $\xi(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \xi(\varphi) \subseteq D$.

Também gostaríamos de mostrar que $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$, isto é, que os dois conceitos de consequência formal, sintática e semântica, são equivalentes. Para muitos sistemas formais importantes este resultado vale, porém não sempre.

Formalização de Tarski

Em meados da década de 1930, Alfred Tarski, um lógico matemático polonês, introduziu a definição de operador de consequência (de Tarski) com a finalidade de caracterizar, através de uma função, o conceito de consequência lógica. Tarski buscou aspectos gerais que as muitas lógicas conhecidas naquele momento tinham em comum. Assim, a definição de Tarski engloba uma classe bastante ampla de lógicas, mas não todas as lógicas. Aquelas lógicas que respeitam esta definição de operador de consequência são nomeadas de lógicas de Tarski (FEITOSA, NASCIMENTO, SILVESTRINI, 2014).

Definição 1: Um *operador de consequência* sobre E é a uma função C: $\mathcal{P}(E)$ ® $\mathcal{P}(E)$ tal que, para todos A, B $\subseteq$ E, valham:

(C_1) $A \subseteq \mathsf{C}(A)$ [autodedutibilidade]

(C_2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathsf{C}(A) \subseteq \mathsf{C}(B)$ [monotonicidade]

(C_3) $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) \subseteq \mathsf{C}(A)$ [idempotência].

Para todo operador de consequência C, por (C_1) e (C_3), vale a igualdade $\mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(A)$.

Definição 2: Um operador de consequência C sobre E é *finitário* quando, para todo $A \subseteq E$:

(C_4) $\mathsf{C}(A) = \cup\{\mathsf{C}(A_f) : A_f$ é subconjunto finito de $A\}$.

Tarski mostrou, em seus textos que, (C_1), (C_3) e (C_4) garantem (C_2).

Definição 3: *Espaço de Tarski* (*sistema dedutivo*, *espaço de fecho*, *lógica*) é um par (E, C), em que E é um conjunto qualquer e C é um operador de consequência sobre E.

Esta definição é bastante geral, pois entende como lógica todo conjunto sobre o qual caracterizamos um operador de consequência de Tarski. As lógicas usualmente encontradas nos textos de lógica

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

são mais específicas, por trazerem muitos mais elementos definidores. Contudo, de modo geral, são sistemas de Tarski.

Definição 4: Seja C um operador de consequência sobre E, o conjunto A é *fechado* em (E, C) quando $\mathsf{C}(A) = A$, e A é *aberto* quando o complementar de A, denotado por A^{C}, é fechado em (E, C).

Proposição 5: Se (E, C) é um espaço de Tarski, então o domínio E é fechado, o conjunto $\varnothing$ é aberto e para todo $A \subseteq E$, o conjunto $\mathsf{C}(A)$ é fechado. ■

Proposição 6: Toda intersecção de conjuntos fechados num espaço de Tarski (E, C), é ainda um conjunto fechado. Toda união de conjuntos abertos é um aberto de (E, C). ■

Certamente, $\mathsf{C}(\varnothing)$ e E correspondem ao menor e ao maior fechados, respectivamente, associados ao operador de consequência C sobre o conjunto E.

Definição 7: Um espaço de Tarski (E, C) é *vácuo* se $\mathsf{C}(\varnothing) = \varnothing$.

Definição 8: Num espaço de Tarski (E, C), dois elementos x, y $\subseteq$ E são equivalentes relativos ao operador C, o que é denotado por $x \sim y$, se $\mathsf{C}(\{x\}) = \mathsf{C}(\{y\})$.

Com estes elementos, demos uma caracterização matemática para o conceito de lógica.

Relação ou função

Nos textos de lógica, com frequência, associamos o conceito de consequência a uma relação que atribui a cada conjunto de premissas exatamente um elemento como consequência, a conclusão.

Esta abordagem generaliza a nossa concepção de inferência.

Definição 9: Denominamos uma relação $R \subseteq E \times E$ de *equipotente*; e uma relação $R \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ de *não-equipotente*, em que $\mathcal{P}(E)$ é o conjunto das partes de E.

Daí, uma relação de consequência de conclusão unitária é um caso de relação de consequência não-equipotente, enquanto que uma relação de consequência de múltiplas conclusões será exemplo de relação de consequência equipotente.

O conceito de operador de consequência de Tarski, definido na seção anterior, é um exemplo de relação equipotente, visto que C: $\mathcal{P}$(E) ® $\mathcal{P}$(E), isto é, a função C é uma relação contida em $\mathcal{P}$(E) × $\mathcal{P}$(E).

Definição 10: Seja E um conjunto não vazio. Para $A \cup B \cup \{x, y\} \subseteq E$, a relação $\vdash\ \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ é uma relação de consequência sobre E se valem as condições:

(R_1) $\{x\} \vdash x$

(R_2) $A \vdash x \Rightarrow A \cup B \vdash x$

(R_3) $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$.

Denotamos o sistema dedutivo dado pelo conjunto E e a relação de consequência $\vdash$ sobre E por (E, $\vdash$).

Proposição 11: A relação de consequência $\vdash$ acima, sobre E, determina uma relação de ordem parcial dada por:

(i) $\{x\} \vdash x$; (ii) $\{x\} \vdash y$ e $\{y\} \vdash z \Rightarrow \{x\} \vdash z$; (iii) $\{x\} \vdash y$ e $\{y\} \vdash x \Leftrightarrow x \sim y$.

Demonstração: (i) é consequência de (R_1), (ii) se $\{x\} \vdash y$ e $\{y\} \vdash z$, por (R_2), $\{x\} \vdash y$ e $\{x\} \cup \{y\} \vdash z$ e, daí, por (R_3), $\{x\} \vdash z$; (iii) decorre de x e y terem as mesmas consequências. ■

Proposição 12: Se (E, C) é espaço de Tarski, então a relação induzida por $A \vdash x \Leftrightarrow x \subseteq \mathsf{C}(A)$ determina uma relação de consequência conforme a Definição 6.2.

Demonstração: Por (C_1), $\{x\} \subseteq \mathsf{C}(\{x\}) \Leftrightarrow x \subseteq \mathsf{C}(\{x\}) \Leftrightarrow \{x\} \vdash x$. Assim, vale ($R_1$).

Se $A \vdash x$, pela indução, $x \subseteq \mathsf{C}(A)$ e, daí, por (C_2), como $A \subseteq A \cup B$, $x \subseteq \mathsf{C}(A \cup B)$. Mais uma vez pela indução, $A \cup B \vdash x$. Então, vale (R_2).

Se $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y$, pela indução, $x \subseteq \mathsf{C}(A)$ e $y \subseteq \mathsf{C}(A \cup \{x\})$. Daí, por ($C_2$), $y \subseteq \mathsf{C}(A \cup \mathsf{C}(A))$ e, por (C_1), $y \subseteq \mathsf{C}(\mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(A)$. Pela indução, $A \vdash y$. Logo, vale (R_3). ■

Agora, a recíproca.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

Proposição 13: Se (E, $\vdash$) representa uma relação de consequência segundo a Definição 6.2 e definimos $\mathsf{C}(A) = \{x : A \vdash x\}$, então C é um operador de Tarski sobre E.

Demonstração: Por (R_5), se $x \subseteq A \Rightarrow A \vdash x$ e, portanto, $A \subseteq \mathsf{C}(A)$, donde vale ($\mathsf{C}_1$).

Se $A \subseteq B$ e $y \subseteq \mathsf{C}(A)$, então $A \vdash y$. Por (R_2), $A \cup B \vdash y$ e, assim, $B \vdash y$. Daí, $y \subseteq \mathsf{C}(B)$ e vale (C_2).

De (R_3) temos que $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$. Daí e segundo o operador C, temos que, para todo x, se $x \subseteq \mathsf{C}(A)$ e $y \subseteq \mathsf{C}(A \cup \{x\})$, então $y \subseteq \mathsf{C}(A)$, então, por ($R_1$) e ($R_2$), se $y \subseteq \mathsf{C}(A \cup \mathsf{C}(A)) = \mathsf{C}(\mathsf{C}(A))$, então $y \subseteq \mathsf{C}(A)$. Desse modo, vale ($\mathsf{C}_3$). ■

A nossa relação de consequência é tal que a cada momento obtemos um elemento x a partir de um conjunto A, o que é denotado por $A \vdash x$. Podemos abusar da notação e escrever $A \vdash B$, se $A \vdash y$, para todo $y \subseteq B$.

Nas lógicas conhecidas, é bastante comum a presença de teoremas. Teoremas são aqueles elementos essenciais em algumas lógicas e tais que não dependem de quaisquer elementos anteriores. Por isso são obtidos do conjunto vazio $\varnothing$.

Definição 14: O conjunto dos teoremas de (E, $\vdash$) é dado por $T = \{x \subseteq E : \varnothing \vdash x\}$.

Também ocorrem com frequência nas lógicas os elementos explosivos, aqueles que geram todos os demais elementos.

Definição 15: O conjunto dos elementos explosivos de (E, $\vdash$) é dado por $\perp = \{x \subseteq E : x \vdash E\}$.

Proposição 16: Se (E, C) admite teoremas, então cada elemento $t \subseteq T$ é maximal com relação à ordem da Proposição 6.3.

Demonstração: Como $\varnothing \vdash t$, então para todo $x \subseteq E$, temos que $\{x\} \vdash t$. Logo, segundo esta ordem, nenhum elemento é maior que qualquer teorema t. ■

Para cada $t \subseteq T$, temos que a classe $\mathsf{C}(t) = T$ e para cada $e \subseteq \perp$, $\mathsf{C}(e) = E$. Num sistema esqueleto, dado pela relação de equivalência ~ da Proposição 5.8, então $\perp$ é o menor elemento e T é o elemento máximo, segundo a ordem do sistema esqueleto.

Proposição 17: Se (E, C) admite elementos explosivos, então cada elemento $e \subseteq \perp$ é minimal com relação à ordem da Proposição 6.3.

Demonstração: Imediato pela definição de $\perp$. ■

Considerações finais

Neste artigo apresentamos caracterizações sutilmente distintas para os termos "argumento", "raciocínio" e "inferência", os quais geralmente são tomados como sinônimos.

Ao longo da maior parte da exposição falamos de consequência como uma relação entre uma ou mais premissas e uma conclusão, mas, claramente, poderíamos considerar conclusões múltiplas e mantermos de forma análoga os conceitos discutidos. O operador de consequência na Definição 1, por exemplo, é um caso em que temos conclusões múltiplas.

No ambiente formal, pudemos definir precisamente o conceito de consequência dedutiva. Algo interessante seria tratar de maneira semelhante os conceitos de consequência indutiva e consequência abdutiva.

Na literatura encontramos artigos que buscam tratar, de alguma forma, as inferências indutivas, como o de Reiter (1980) que formaliza argumentos padrões do tipo "na ausência de alguma informação contrária, assume-se...", ou seja, argumentos que 'quase sempre' são verdadeiros, com algumas exceções. Também Grácio (1999) introduziu uma família de sistemas lógicos a fim de formalizar algum tipo de argumento indutivo, em que cada representante é chamado lógica modulada. Bem como encontramos artigos que tentam formalizar o conceito de inferência abdutiva, por exemplo, (ALISEDA, 2006) e (DILLIG, DILLIG, 2013).

Como pesquisas futuras ainda podemos explorar artigos que tratam destes dois tipos de consequência, indutiva e abdutiva, e, quiçá, sustentar nossas próprias formulações.

Bibliografia

ALISEDA, A. **Abductive Reasoning: logical investigations into discovery and explanation.** The Netherlands: Springer, 2006.

FEITOSA, Hércules de Araújo; SOARES, Marcelo Reicher; MOREIRA, Ângela Pereira Rodrigues. *Sobre Consequência Lógica.* Mimesis, Bauru, v. 37, n. 1, p. 43-60, 2016.

BEZIAU, J-Y. Universal logic. In: T. CHILDERS; O. MAJER (Eds.). **Proceedings of the 8th International Colloquium - Logica'94**. Prague: Czech Academy of Sciences, p. 73-93, 2004.

BEZIAU, J-Y. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In: BEZIAU, J-Y. (Ed.) **Logica universalis**, Basel, p. 3-19, 2007.

DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia I: a teoria geral. **Cognitio: Revista de Filosofia**, São Paulo, n. 2, p. 213-219, 2001.

DE SOUZA, E. G. Lindenbaumologia II: a teoria geral. In: **Cognitio: Revista de Filosofia**, São Paulo, n. 3, p. 115-121, 2002.

DILLIG, I.; DILLIG, T. Explain: a tool for performing abductive inference. In: N. SHARYGINA; H. VEITH (Eds.). **CAV 2013**. LNCS, Heidelberg: Springer, p. 684-689, 2013.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. A. Deductive systems and translations. In: BÉZIAU, J.-Y.; COSTA-LEITE, A. (Eds.). **Perspectives on Universal Logic.** Italy: Polimetrica, p. 125–157, 2007.

EUCLIDES. **Os elementos/Euclides**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; SILVESTRINI, L. H. C. Confrontando propriedades lógicas em um contexto de lógica universal. **Cognitio: Revista de Filosofia**, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 333-347, 2014.

FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. A survey of abstract algebraic logic. **Studia Logica**, Warsaw, v. 74, p. 13 - 97, 2003.

GENTZEN, G. Investigation into logical deduction. In: SZABO M. E. (Ed.) **The collected papers of Gerhard Gentzen.** Amsterdam: North-Holland Publishing Company, p. 68-131, 1969.

GONZALEZ, M. E. Q.; HASELAGER, W. F. G. **Cognitio: Revista de Filosofia**, São Paulo, n. 3, p. 22-31, 2002.

DOŠEN, K. Logical consequence: a turn in style. In M. L. Dalla Chiara *et al*. (Eds.) Logic and Scientific Methods. Dordrecht: Kluwer, p. 289-311, 1997.

GRÁCIO, M. C. C. **Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza**. Tese de Doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1999. 194 f.

MARTIN, N. M.; POLLARD, S. **Closure spaces and logic**. Dordrecht: Kluwer, 1996.

REITER, R. A logic for default reasoning. **Artificial Intelligence**, Amsterdam, v. 13, p. 81-132, 1980.

SALMON, W. C. **Lógica**. 3 ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall, 1984.

SUNDHOLM, G. Systems of deduction. In GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (Eds.) **Handbook of Philosophical Logic**. Dordrecht: Reidel, v. 1, p. 133-188, 1983.

TARSKI, A. **Logic, semantics, metamathematics**. Editor's Preface to the revised edition, CORCORAN, J. (Ed.). 2 ed. Indianapolis: Hackett Publishing Company, 1983.

WALLMANN, C. A shared framework for consequence operations and abstract model theory. **Logica Universalis**, Basel, v. 7, p. 125-145, 2013.

WÓJCICKI, R. **Theory of logical calculi**. Dordrecht: Kluwer, 1998.